XXXVI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2014 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. La mitad de las casillas de un tablero cuadrado tiene escrito un + y la otra mitad un – . Demostrar que hay dos filas o dos columnas que contienen el mismo número de +.

Nota. El tablero tiene un número par de casillas. 4 PUNTOS

2. Demostrar que si un polígono tiene todos sus vértices sobre una circunferencia entonces tiene tres lados con los que se puede formar un triángulo. 5 PUNTOS

3. Determinar si es posible dividir todos los divisores positivos de 100! (incluidos 1 y 100!) en dos grupos de modo que cada grupo contenga la misma cantidad de enteros y que la multiplicación de los números del primer grupo sea igual a la multiplicación de los números del segundo grupo. 6 PUNTOS

4. En un camino circular hay 25 puestos policiales a la misma distancia unos de otros. Cada policía (hay uno en cada puesto) tiene una placa con un único número entero entre 1 y 25. Los policías reciben la orden de cambiar sus posiciones de modo que los números en las placas queden en orden consecutivo de 1 a 25, en el sentido de las agujas del reloj. Si la suma total de las distancias caminadas por los policías a lo largo del camino es la mínima posible, demostrar que uno de ellos permaneció en su posición inicial. 7 PUNTOS

5. En un triángulo rectángulo se construyen dos circunferencias del mismo radio de modo que sean tangentes entre si y cada una de ellas sea tangente a la hipotenusa y a un cateto. Sean M y N los puntos de tangencia de las circunferencias con la hipotenusa. Demostrar que el punto medio del segmento MN pertenece a la bisectriz del ángulo recto del triángulo. 8 PUNTOS

6. Diremos que un entero positivo es *plano* si consiste de un solo dígito repetido. (Por ejemplo, 4, 111, 999999). Demostrar que todo entero de n dígitos se puede representar como la suma de a lo sumo $n+1$ enteros planos. 8 PUNTOS

7. Un spiderweb es un cuadrado con 100×100 nodos (o sea, con 99×99 casillas). 100 moscas están atrapadas en el spiderweb, pegadas a 100 nodos distintos. Una araña que estaba originalmente en una esquina del spiderweb va de un nodo a otro adyacente contando movidas y comiendo moscas en su camino (pasar de un nodo a otro adyacente cuenta como una movida). Determinar si la araña puede comer todas las moscas en no más de

a) 2100 movidas; 5 PUNTOS

b) 2000 movidas. 5 PUNTOS

XXXVI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2014 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Demostrar que si un polígono tiene una circunferencia que es tangente a todos sus lados entonces tiene tres lados con los que se puede formar un triángulo. 4 PUNTOS

2. En un camino circular hay 25 puestos policiales a la misma distancia unos de otros. Cada policía (hay uno en cada puesto) tiene una placa con un único número entero entre 1 y 25. Los policías reciben la orden de cambiar sus posiciones de modo que los números en las placas queden en orden consecutivo de 1 a 25, en el sentido de las agujas del reloj. Si la suma total de las distancias caminadas por los policías a lo largo del camino es la mínima posible, demostrar que uno de ellos permaneció en su posición inicial. 6 PUNTOS

3. Beto escribió 100 números en el pizarrón y calculó su multiplicación. A continuación aumentó cada número en 1 y observó que la multiplicación de todos los números no cambiaba. Luego aumentó los números de la misma manera otra vez, y nuevamente la multiplicación no cambió. Él hizo este procedimiento k veces, y cada vez obtuvo la misma multiplicación. Hallar el mayor valor posible de k.
6 PUNTOS

4. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA, AB en los puntos A', B', C' respectivamente. Las tres rectas AA', BB', CC' se cortan en el punto G. Definimos C_A y C_B como los puntos de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo $GA'B'$ con las rectas AC y BC, distintos de B' y A'. De manera similar definimos los puntos A_B, A_C, B_C, B_A. Demostrar que los puntos $C_A, C_B, A_B, A_C, B_C, B_A$ pertenecen a una misma circunferencia.
ACLARACIÓN La *circunferencia inscrita* de un triángulo es tangente a cada lado del triángulo. Su centro es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo.
La *circunferencia circunscrita* de un triángulo pasa por los tres vértices del triángulo. Su centro es el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. 7 PUNTOS

5. Alex contó todas las posibles palabras que consisten de m letras, tales que cada letra solo puede ser T, O, W, N y cada palabra contiene igual número de letras T que de letras O. Bea contó todas las posibles palabras que consisten de $2m$ letras, tales que cada letra solo puede ser T u O y cada palabra contiene igual número de letras T que de letras O. Determinar cuál de los dos contó mayor cantidad de palabras. 7 PUNTOS

6. Había un triángulo de alambre con ángulos de $x^\circ, y^\circ, z^\circ$. El profesor Rucucu dobló cada lado del triángulo en 1° en algún punto. Como resultado obtuvo un hexágono no convexo de ángulos $(x-1)^\circ$, 181°, $(y-1)^\circ$, 181°, $(z-1)^\circ$, 181°. Demostrar que los puntos de doblez dividen a los lados del triángulo inicial en la misma proporción. 8 PUNTOS

7. En un reino se usa arena de oro y arena de platino como moneda. La tasa de cambio está definida por dos enteros positivos g y p de la siguiente manera: x gramos de arena de oro son equivalentes a y gramos de arena de platino si $xg = yp$ (x e y no son necesariamente enteros). El día en el que los números eran $g = p = 1001$, el Banco Central anunció que cada día a partir de ese uno de los números ya sea g o p se disminuiría en 1 de modo que al cabo de 2000 días ambos números se transformarían en 1. Sin embargo, no se anunció el orden exacto en el que se disminuirían los números. En el momento del anuncio un banquero tenía 1 kg de arena de oro y 1 kg de arena de platino. El objetivo del banquero es hacer intercambios de modo de tener al final por lo menos 2 kg de arena de oro y 2 kg de arena de platino. Determinar si el banquero puede lograr con certeza su objetivo. 10 PUNTOS